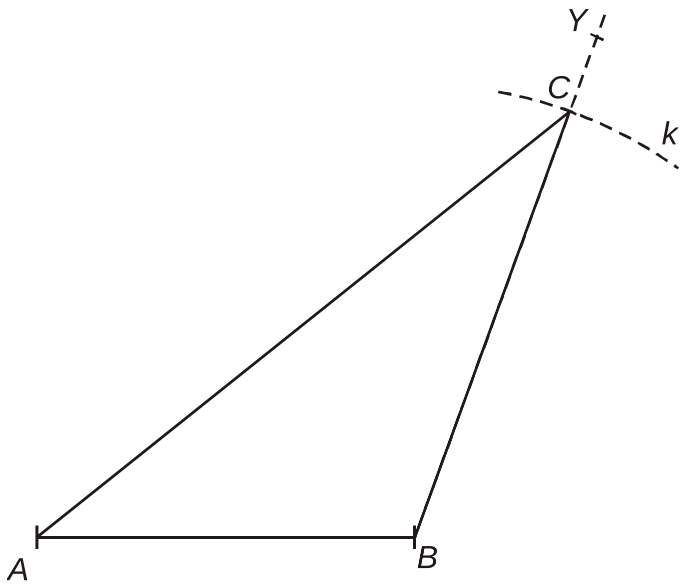
3.6.3 Prvky trojúhelníků

Předpoklady: 030602

Př. 1: Narýsuj trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $c = 5\,\text{cm}$, $\beta = 110°$, $a = 6\,\text{cm}$. Změř velikosti vnitřních úhlů a strany *b*. Zkontroluj, zda platí vzorec pro součet úhlů v trojúhelníku. Spočítej, o kolik procent se naměřená délka strany *b* liší od správné hodnoty $9{,}03\,\text{cm}$. Narýsuj všechny výšky trojúhelníku a najdi jejich průsečík (orthocentrum). Změř délky všech výšek.

Vrchol *C* trojúhelníku bude ležet na:

- polopřímce *BY*, která se stranou *AB* svírá úhel $\beta = 110°$,
- kružnici $k\left(B; a = 6\text{ cm}\right)$.

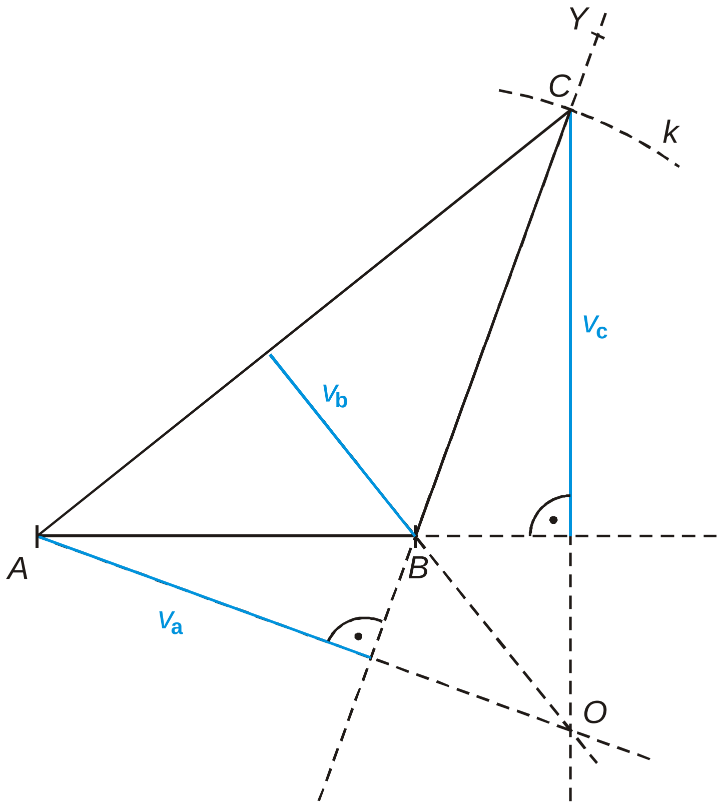


Velikosti úhlů: $\alpha = 39°$, $\beta = 110°$, $\gamma = 31°$.

Součet úhlů: $\alpha + \beta + \gamma = 39° + 110° + 31° = 180°$ (vzorec platí).

Strana $b = 9\,\text{cm}$.

Výšky jsou úsečky, které spouštíme z vrcholů kolmo na protější strany.



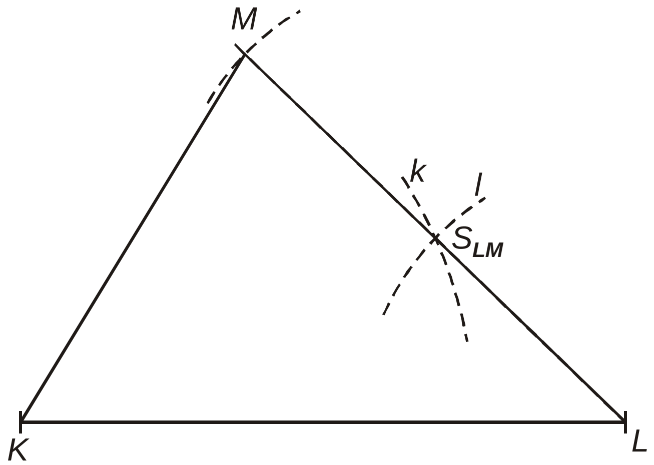
Délky výšek: $v_a = 4,7\,\text{cm}$, $v_b = 3,1\,\text{cm}$, $v_c = 5,6\,\text{cm}$. Orthocentrum trojúhelníku leží mimo trojúhelník, protože trojúhelník je tupý.

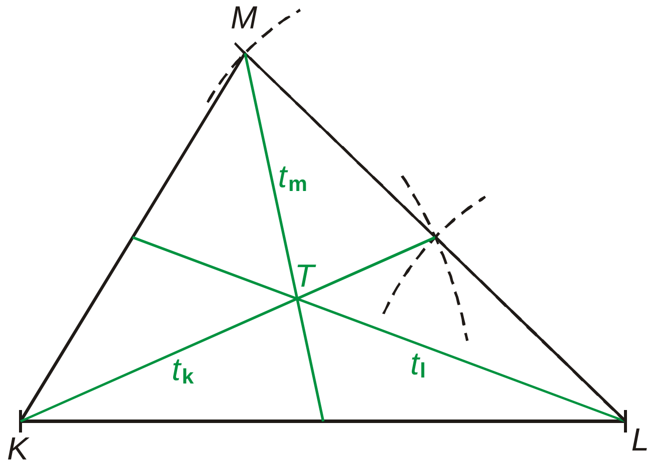
Př. 2: Narýsuj trojúhelník *KLM*, je-li dáno: $|KL| = m = 8\,\text{cm}$, $|LM| = k = 7\,\text{cm}$, $t_k = 6\,\text{cm}$. Narýsuj všechny těžnice trojúhelníku a změř jejich délky. Změř vzdálenost těžiště od vrcholu *K*. Zkontroluj, zda platí pravidlo pro rozdělení těžnice těžištěm.

Nejdříve narýsujeme trojúhelník KLS_{LM}, ve kterém známe všechny tři strany (těžnice spojuje vrchol se středem protější strany).

Vrchol S_{LM} trojúhelníku KLS_{LM} bude ležet na:

- kružnici $k\left(K; t_k = 6\text{ cm}\right)$ (kvůli těžnici t_k),
- kružnici $l\left(L; 3,5\text{ cm} = \dfrac{k}{2}\right)$ (bod S_{LM} je středem strany *LM*).





Délky těžnic: $t_k = 6\,\text{cm}$ (zadání), $t_l = 7\,\text{cm}$, $t_m = 5\,\text{cm}$

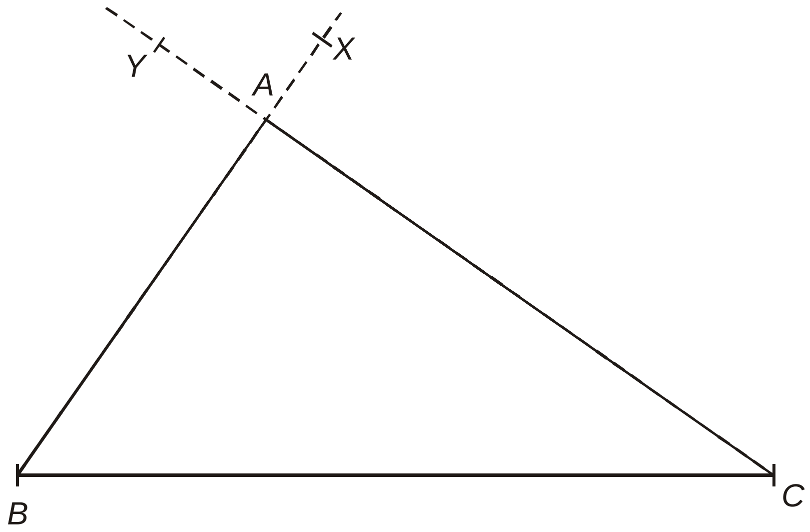
Vzdálenost $|TK| = 4\,\text{cm}$.

Poměr úseků těžnice je $|TK| > |TS_{LM}| = 2:1 \Rightarrow t_k : |TK| = 3:2$. Dosadíme naměřené hodnoty: $t_k : |TK| = 6:4 = 3:2$.

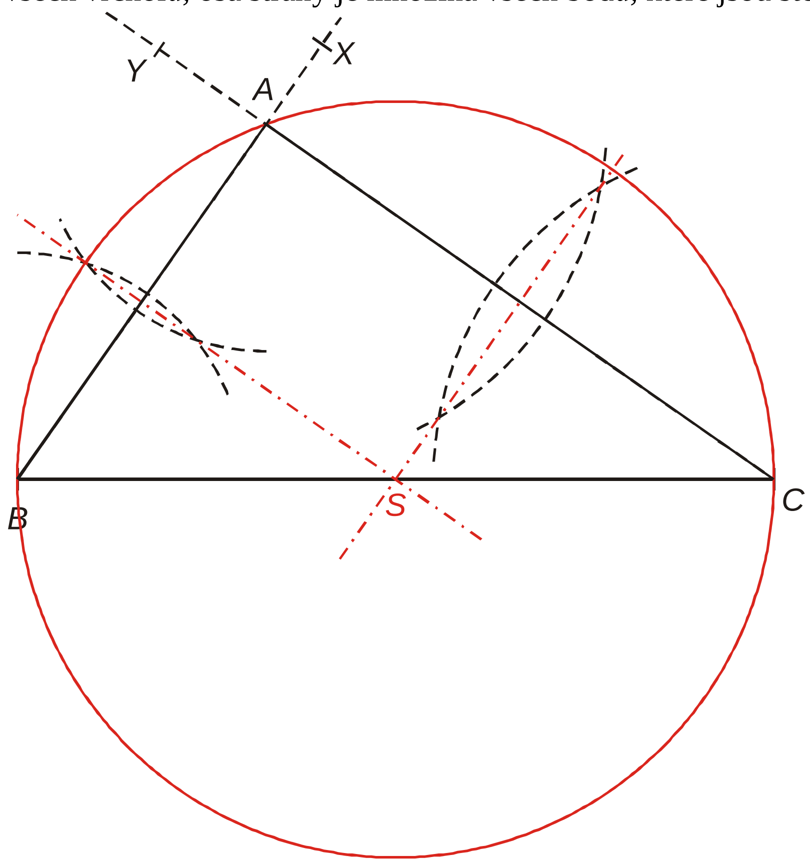
Př. 3: Narýsuj trojúhelník ABC, je-li dáno $a = 10\,\text{cm}$ $\beta = 55°$, $\gamma = 35°$. Jakou speciální vlastnost má tento trojúhelník? Kde bude ležet střed jeho kružnice opsané? Narýsuj kružnici opsanou. Jakou speciální vlastnost tato opsaná kružnice má?

Vrchol *A* trojúhelníku bude ležet na:

- polopřímce *BX*, která se stranou *BC* svírá úhel $\beta = 55°$,
- polopřímce *CY*, která se stranou *BC* svírá úhel $\gamma = 35°$.



Trojúhelník je pravoúhlý, střed jeho kružnice opsané bude ležet na jeho přeponě - tedy straně *BC*.
Střed kružnice opsané je průsečík os stran (střed kružnice opsané musí být stejně daleko od všech vrcholů, osa strany je množina všech bodů, které jsou stejně daleko od krajních bodů).



Narýsovaná kružnice je Thaletovou kružnicí nad průměrem *BC*. Pokud by vrchol *A* trojúhelníku ležel na libovolném jiném bodu kružnice (kromě bodů *B* a *C*) byl by trojúhelník *ABC* stále pravoúhlý.

Př. 4: Narýsuj trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $c = 9\,\text{cm}$, $\beta = 64°$, $\gamma = 68°$. Narýsuj kružnici trojúhelníku vepsanou.

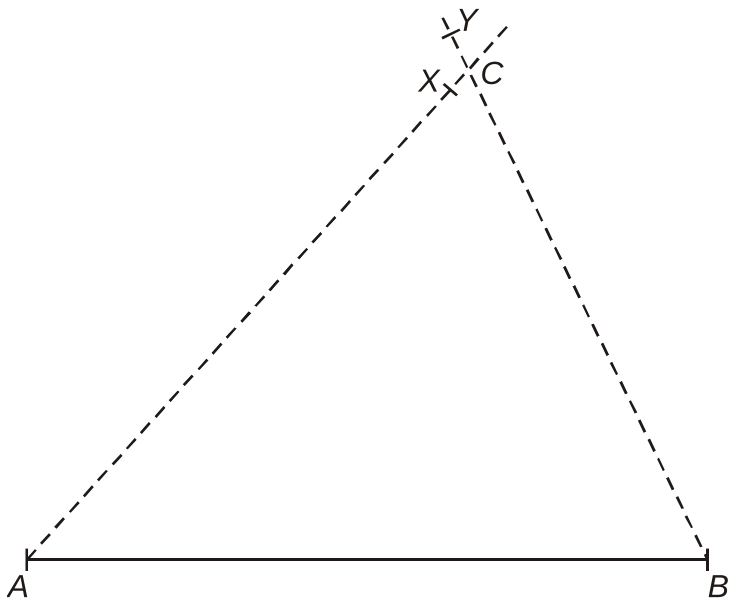
Pro sestrojení trojúhelníku potřebujeme znát velikost obou úhlů u zadané strany *AB* $\Rightarrow$ velikost úhlu α dopočítáme ze součtu úhlů v trojúhelníku.

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \qquad / -\beta - \gamma$

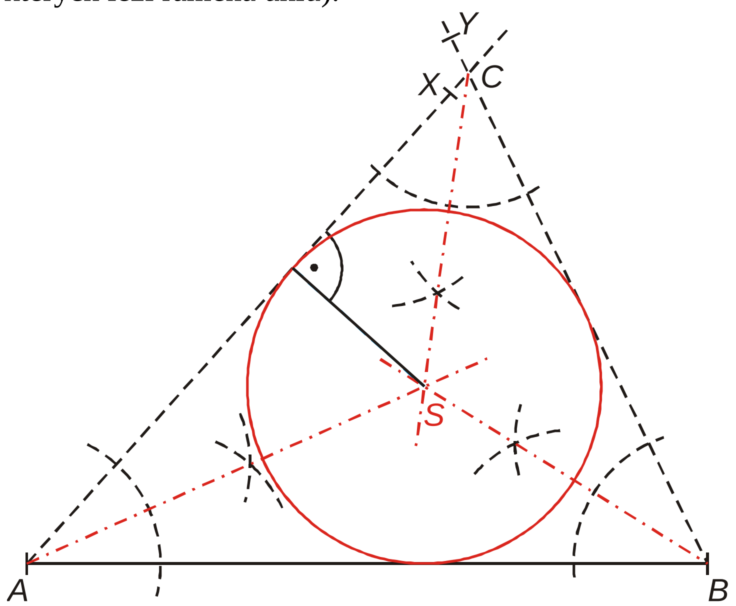
$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 64° - 68° = 48°$

Vrchol *C* trojúhelníku bude ležet na:

- polopřímce *AX*, která se stranou *AB* svírá úhel $\alpha = 48°$,
- polopřímce *BY*, která se stranou *AB* svírá úhel $\beta = 64°$.



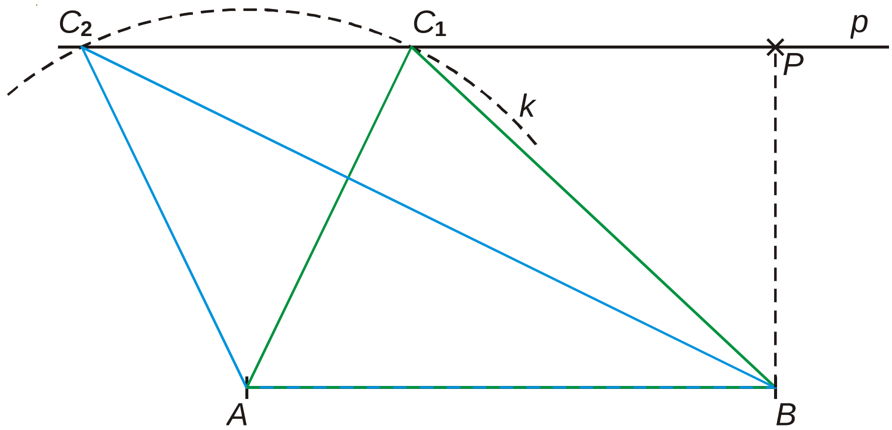
Středem kružnice vepsané je průsečík os úhlů (střed kružnice vepsané musí být stejně daleko od všech stran, osa úhlu je množina všech bodů, které jsou stejně daleko od přímek, na kterých leží ramena úhlu).



Př. 5: Narýsuj trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $c = 7\ \text{cm}$, $v_c = 4{,}5\ \text{cm}$, $b = 5\ \text{cm}$. Kolik má úloha řešení?

Vrchol *C* trojúhelníku bude ležet na:

- přímce *p*, která je rovnoběžná se stranou *AB* a je od ní vzdálena $v_c = 4{,}5\ \text{cm}$ (na této přímce musí vrchol *C* ležet, aby pro trojúhelník *ABC* platilo $v_c = 4{,}5\ \text{cm}$),
- kružnici $k\left(A; b = 5\ \text{cm}\right)$.



Příklad má dvě řešení (můžeme narýsovat dva neshodné trojúhelníky, které splňují zadání), protože přímka *p* se s kružnicí *k* protne ve dvou bodech.

Shrnutí: